数理解析研究所講究録
1497 巻 2006 年 15-31

Several refined conjectures on TSSCPP and ASM

Masao Ishikawa
Faculty of Education, Tottori University
Koyama, Tottori, Japan
ishikawa@fed.tottori-u.ac.jp

Mathematics Subject Classifications: 05A15, 05A17, 05E05, 05E10.

Abstract

この記事の中では Mills, Robbins, Rumsey による 1986 年の論文 “Self-complementary totally symmetric plane partitions” *J. Combin. Theory Ser. A* **42**, 277–292) の中にある totally symmetric self-complementary plane partitions (TSSCPP) に関する予想を考察する。我々は、これらの予想について、Pfaffain・行列式による表現と constant term identity による表現を与える。この記事の中では、結果を述べるにとどめ、詳しい証明は本論文 “On refined enumerations of totally symmetric self-complementary plane partitions I, II” ([11, 12]) を参照して頂きたい。

1 平面分割と全単射

[25] の論文の中で Mills, Robbins, Rumsey は totally symmetric self-complementary plane partitions と alternating sign matrix に関する 7 つの予想を提唱した。このうちの個数に関する予想 ([25, Conjecture 1]) は G.E. Andrews ([2]) によって最終的に解決された。(see also [31]). また [34] の中で D. Zeilberger は、この予想に関する constant term identity を得た。また、もう 1 つの Alternating sign matrix に関する予想も解決した。この論文の目的は、残りの予想に関する Pfaffian または行列式による表現と Zeilberger の constant term identity による発展を述べることである。

まずは、plane partition の定義から始めよう。partition 等の定義や記号は Macdonald の本 [23] に従う。*plane partition* とは、非負整数を平面上に並べた行列 $\pi=(\pi_{ij})_{i,j\geq1}$ で、有限個を除いて 0 であり、各行は左から右へ弱い意味での減少、各列は上から下へ弱い意味での減少するもののことである。また $\sum_{i,j\geq1}\pi_{ij}=n$ のとき $|\pi|=n$ と書き、π は n の plane partition, または π の *weight* は n であるという。Plane partition $\pi=(\pi_{ij})_{i,j\geq1}$ の 0 でない成分を π の *part* という。π の第 i 行の 0 でない成分の個数が λ_i 個であるとき partition $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$ を π の *shape* という。$r=\ell(\lambda)$ のとき π は r 個の行を持つといい、$s=\ell(\lambda')$ のとき π は s 個の列を持つという。Plane partition が各列について上から下に強い意味で減少のとき *column-strict* という。たとえば

$$\begin{matrix}5&5&4&3&2&1\\4&4&2&2&1&\\2&2&1&1&&\\1&&&&&\end{matrix}$$

は column-strict plane partition で shape $(6,5,4,1)$ であり、4 個の行と, 6 個の列を持ち weight は 40 である。

$\mathbb{P}^3$ の点を $\mathbb{R}^3$ の lattice points と見做すことにしよう。π の *Ferrers graph* $F(\pi)$ とは $k \le \pi_{ij}$ を満たす lattice point $(i,j,k) \in \mathbb{P}^3$ の集合であるとする。$\mathbb{P}^3$ の部分集合 F が、ある plane partition の Ferrers graph であるための必要十分条件は

$$x_1 \le x_2,\ y_1 \le y_2,\ z_1 \le z_2 \text{ and } (x_2,y_2,z_2) \in F \Rightarrow (x_1,y_1,z_1) \in F.$$

を満たすことである。これ以後 plane partition と Ferrers graph を同一視して $F(\pi)$ の代わりに π と書くことにする。対称群 S_3 が $\mathbb{P}^3$ に座標軸の置換として自然に作用しているとする。ある plane partition が *totally symmetric* であるとは S_3 の 6 個のすべての permutation によって Ferrers graph が不変であることであるとする。

$\mathbb{P}^3$ の $r \times s \times t$ の箱を $X_{r,s,t} = [r] \times [s] \times [t]$ と書く。$r,\ s,\ t$ はすべて偶整数とする。$x - r/2,\ y - s/2,\ z - t/2$ の正負に依って、この箱 $X_{r,s,t}$ を 8 個の領域に分けて $X^{+++}_{r,s,t}, X^{++-}_{r,s,t}, X^{+-+}_{r,s,t}, X^{+--}_{r,s,t}, X^{-++}_{r,s,t}, X^{-+-}_{r,s,t}, X^{--+}_{r,s,t}, X^{---}_{r,s,t}$ と書く。たとえば $X^{-+-}_{r,s,t} = [1, r/2] \times [s/2+1, s] \times [1, t/2]$ である。さらに $X^{+}_{r,s,t} = X^{+++}_{r,s,t} \uplus X^{++-}_{r,s,t} \uplus X^{+-+}_{r,s,t} \uplus X^{-++}_{r,s,t}$, $X^{-}_{r,s,t} = X^{+--}_{r,s,t} \uplus X^{-+-}_{r,s,t} \uplus X^{--+}_{r,s,t} \uplus X^{---}_{r,s,t}$ という記号を使う。これの一般化として (a,b,c) を中心にする $r \times s \times t$ の箱を $X_{r,s,t}(a,b,c) = [a-r/2+1, a+r/2] \times [b-s/2+1, b+s/2] \times [c-t/2+1, c+t/2]$ と書くことにする。上と同様にして $X^{\pm\pm\pm}_{r,s,t}(a,b,c)$ などのような記号も使う。例えば $X^{+-+}_{r,s,t}(a,b,c) = [a+1, a+r/2] \times [b-s/2+1, b] \times [c+1, c+t/2]$ である。$X^{\pm}_{r,s,t}(a,b,c)$ のような記号も上と同様に定義できることは言うまでもないであろう。ここで $\sigma_{r,s,t} : (x,y,z) \mapsto (r+1-x, s+1-y, t+1-z)$ は involution で *complementation* と言われる。$r = s = t$ かつ $a = b = c$ であるとき $X_{r,r,r}$ の代わりに X_r, $X^{\pm\pm\pm}_{r,r,r}$ の代わりに $X^{\pm\pm\pm}_r$, $X^{\pm}_{r,r,r}$ の代わりに $X^{\pm}_r$, σ_r for $\sigma_{r,r,r}$ などのような省略形を用いる。また $X_r(a)$, $X^{\pm\pm\pm}_r(a)$, $X^{\pm}_r(a)$ などの記号も同様に用いられる。

$r,s,t > 0$ を整数とする。Plane partition $\pi \subseteq X_{r,s,t}$ が (r,s,t)-self-complementary であるとは任意の $p \in X_{r,s,t}$ に対して $p \in \pi \Leftrightarrow \sigma_{r,s,t}(p) \notin \pi$ が成り立つことである。

立方体 X_{2n} に含まれる $(2n,2n,2n)$-self-complementary でかつ totally symmetric である plane partition 全体の集合を $\mathcal{T}_n$ と書く。

Definition 1.1. $\mathcal{T}_n$ の元は size n の totally symmetric self-complementary plane partition (TSSCPP) という。非負整数 m と $n \ge 1$ に対して

(T) each $p \in \pi \cap X_{2m}(n)$ must be contained in $X^{-}_{2(n+m)}$.

を満たす $\pi \in \mathcal{T}_{n+m}$ 全体の集合を $\mathcal{T}_{n,m}$ と書く。$\pi \in \mathcal{T}_{n,m}$ のとき $\pi \cap X_{2m}(n)$ は、上の条件 (T) によって一意的であることに注意しよう。すなわち $\pi \cap X_{2m}(n) = X^{-}_{2m}(n)$ である。

例えば $\mathcal{T}_{1,2}$ 4 つの元から成り Figure 1 が、それらの Ferrers graph である。

Definition 1.2. m と $n \ge 1$ は非負整数とする。$\mathcal{P}_{n,m}$ によって次の条件を満たす column-strict plane partitions $c = (c_{ij})_{1 \le i,j}$ 全体の集合を表わす。

(C1) c は高々 n 列;

(C2) c の第 j 列の成分は $n + m - j$ 以下である。

$\mathcal{P}_{n,m}$ の元を *restricted column-strict plane partition* (RCSPP) と呼ぶ。特に $m=0$ のとき $\mathcal{P}_{n,0}$ の代わりに $\mathcal{P}_n$ と書く。もしも c の j 列の成分が $n+m-j$ (i.e. $c_{1j}=n+m-j$) であるならばこの成分を *saturated part* と呼ぶ。さらに、以下の 2 つの $\mathcal{P}_{n,m}$ の部分集合を考える。$\mathcal{P}_{n,m}$ の元 c で、行の長さがすべて偶数であるような plane partition 全体の集合を $\mathcal{P}^{\mathrm{R}}_{n,m}$ と書く。同様に $\mathcal{P}^{\mathrm{C}}_{n,m}$ によって列の長さがすべて偶数であるような $c\in\mathcal{P}_{n,m}$ 全体の集合を表わす。また $\mathcal{P}^{\mathrm{R}}_{n,0}$ (resp. $\mathcal{P}^{\mathrm{C}}_{n,0}$) の代わりに $\mathcal{P}^{\mathrm{R}}_{n}$ (resp. $\mathcal{P}^{\mathrm{C}}_{n}$) と書く。

例えば $\mathcal{P}_{1,2}$ は、次の 4 個の plane partition からなる。

$$\emptyset \qquad 1 \qquad \mathbf{2} \qquad \begin{array}{c}\mathbf{2}\\ 1\end{array}$$

この 4 つの RCSPP の中で太字の $\mathbf{2}$ は saturated part を意味する。

μ を strict partition とする。τ が *shifted shape* μ の *shifted plane partition* であるとは μ の shifted shape の各箱に、非負整数を入れて各行、各列について弱い意味で単調減少にすることである。この論文の中では shifted shape μ を最初に固定して中に入る数字は 0 も許されるとする。

Definition 1.3. (cf. [18, Theorem 1]). m と $n\geq 1$ を非負整数とする。次の条件を満たす shifted plane partition $b=(b_{ij})_{1\leq i\leq j}$ 全体の集合を $\mathcal{B}_{n,m}$ と書く。

(B1) b の shifted shape は $(n+m-1,n+m-2,\dots,2,1)$ である;

(B2) $\max\{n-i,0\}\leq b_{ij}\leq n$ for $1\leq i\leq j\leq n+m-1$.

特に $m=0$ のとき $\mathcal{B}_{n,0}$ の代わりに $\mathcal{B}_n$ と書く。ここでは $\mathcal{B}_{n,m}$ の元のことを *triangular shifted plane partition* (TSPP) と呼ぶことにする。

例えば $n=1$ かつ $m=2$ のとき $\mathcal{B}_{1,2}$ は、次の 4 個の元からなる:

$$\begin{array}{cc}\boxed{1}&\boxed{1}\\ &\boxed{1}\end{array}\qquad \begin{array}{cc}\boxed{1}&\boxed{1}\\ &\boxed{0}\end{array}\qquad \begin{array}{cc}\boxed{1}&\boxed{0}\\ &\boxed{0}\end{array}\qquad \begin{array}{cc}\boxed{0}&\boxed{0}\\ &\boxed{0}\end{array}$$

Mills, Robbins, Rumsey は [25, Theorem 1] の中で $\mathcal{T}_n$ と $\mathcal{B}_n$ の間の全単射を構成した。ここでは、3 種類の集合 $\mathcal{T}_{n,m}$, $\mathcal{B}_{n,m}$, $\mathcal{P}_{n,m}$ の間の全単射を構成する。

Theorem 1.4. m と $n\geq 1$ を非負整数とし、$(a_{ij})\in\mathcal{T}_{n,m}$ とする。このとき (a_{ij}) に対して $a_{i+1,j+1}-(n+2m)$ $(1\leq i\leq j\leq n+m-1)$ によって shifted plane partition を定義する。すると、この shifted plane partition は、$\mathcal{B}_{n,m}$ の元であり、この対応によって $\mathcal{T}_{n,m}$ と $\mathcal{B}_{n,m}$ の間の全単射が作られる。

Theorem 1.5. m と $n\geq 1$ を非負整数とし、$a=(a_{ij})\in\mathcal{T}_{n,m}$ とする。Plane partition a に対して行列 $a_{i+n+m,j}-(n+m)-i+1$ $(1\leq i,j\leq n+m)$ を作る。すると、0 と負の部分を無視することによってこの行列は $\mathcal{P}_{n,m}$ の条件を満たす plane partition となる。この対応によって $\mathcal{T}_{n,m}$ と $\mathcal{P}_{n,m}$ の間の全単射が作られる。

$c=(c_{ij})_{1\leq i\leq n+m,1\leq j\leq n}\in\mathcal{P}_{n,m}$ とし、k を正整数とするとき、$\geq k$ である part 全体がなす plane partition を $c_{\geq k}$ と書く。また

$$\theta_i(c_{\geq k})=\sharp\{l: c_{i,l}\geq k\} \tag{1.1}$$

によって $c_{\geq k}$ の第 i 行の長さを表す。すなわち c の第 i 行のにある $\geq k$ である part の個数である。これらの定理より、次の系を得る。

Corollary 1.6. m と $n \geq 1$ を非負整数とし、$c = (c_{ij})_{1\leq i\leq n+m, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{P}_{n,m}$ とする。Plane partition $c = (c_{ij})_{1\leq i\leq n+m, 1\leq j\leq n}$ に対して行列 $b = (b_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n+m-1}$ を

$$n - b_{ij} = \theta_{n+m-j}(c_{\geq 1-i+j}) \tag{1.2}$$

によって定義する。ここで (i,j) は $1 \leq i \leq j \leq n+m-1$ を動く。このとき $b \in \mathcal{B}_{n,m}$ であり、RCSPP c に TSPP $b = \varphi_{n.m}(c)$ を対応させる写像 $\varphi_{n,m}$ は全単射である。

2 Mills, Robbins, Rumsey の予想

最初に alternating sign matrix についての有名な数について復習しよう。(cf. [4, 22, 24, 26, 27, 28, 33, 35]) A_n を

$$A_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!}. \tag{2.1}$$

によって定義しよう。これは、有名な alternating sign matrix conjecture (cf. [4]) に関係している。Totally symmetric self-complementary plane partition の個数は [25, pp.282, Conjecture 1] の中で A_n であると予想され [31, p.p.127, Theorem 8.3] と [2] によって解決された。(see also [1, 3]), また [18] でも別証明が与えられた。n を正整数とし、$1 \leq r \leq n$ とする。A_n^r を

$$A_n^r = \frac{\binom{n+r-2}{n-1}\binom{2n-r-1}{n-1}}{\binom{2n-2}{n-1}} A_{n-1} = \frac{\binom{n+r-2}{n-1}\binom{2n-1-r}{n-1}}{\binom{3n-2}{n-1}} A_n. \tag{2.2}$$

によって定義する。([20, 22, 26, 35]) また、多項式 $A_n(t) = \sum_{r=1}^{n} A_n^r t^{r-1}$ を定義する。例えば $A_1(t) = 1$, $A_2(t) = 1+t$, $A_3(t) = 2+3t+2t^2$, $A_4(t) = 7+14t+14t^2+7t^3$ である。n を正整数とし、$A_n^{k,l}$ $(1 \leq k, l \leq n)$ を、初期条件

$$A_n^{k,1} = A_n^{1,k} = \begin{cases} 0 & \text{if } k = 1 \\ A_{n-1}^{k-1} & \text{if } 2 \leq k \leq n \end{cases} \tag{2.3}$$

と、漸化式

$$A_n^{k+1,l+1} - A_n^{k,l} = \frac{A_{n-1}^{k}(A_n^{l+1} - A_n^{l}) + A_{n-1}^{l}(A_n^{k+1} - A_n^{k})}{A_n^1} \tag{2.4}$$

$(1 \leq k, l \leq n-1)$ によって定義される数とする。$A_n^{k,l}$ が満たす、この漸化式は Stroganov [33, Section 5] によって導入された。また、これは alternating sign matrix の最上行と最下行の 1 の分布と一致することが知られている。例えば $n = 3, 4$ のとき

$$\left(A_3^{k,l}\right)_{1\leq k,l\leq 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \left(A_4^{k,l}\right)_{1\leq k,l\leq 4} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

である。多項式 $A_n(t,u)$ を $A_n(t,u) = \sum_{k,l=1}^{n} A_n^{k,l} t^{k-1} u^{n-l}$ によって定義する。例えば $A_3(t,u) = 1+t+u+tu+t^2u+tu^2+t^2u^2$ である。$\omega = e^{2i\pi/3}$ とするとき Di Francesco と Zinn-Justin の論文で

$$A_n(t,u) = \frac{\{\omega^2(\omega+t)(\omega+u)\}^{n-1}}{3^{n(n-1)/2}} s_{\delta(n-1,n-1)}^{(2n)}\left(\frac{1+\omega t}{\omega+t}, \frac{1+\omega u}{\omega+u}, 1, \ldots, 1\right) \tag{2.5}$$

であることが示されている。ここで $s_\lambda^{(n)}(x_1,\dots,x_n)$ は n 変数の Schur function とする。([6, pp.4], [26])

A_{2n+1}^{VS} を

$$A_{2n+1}^{\mathrm{VS}}=(-3)^{n^2}\prod_{\substack{1\le i,j\le 2n+1\\ 2|j}}\frac{3(j-i)+1}{j-i+2n+1}=\frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{(6k-2)!(2k-1)!}{(4k-1)!(4k-2)!} \tag{2.6}$$

によって定義される数とする。また $A_{2n+1}^{\mathrm{VS},\,r}$ を

$$A_{2n+1}^{\mathrm{VS},\,r}=\frac{A_{2n-1}^{\mathrm{VS}}}{(4n-2)!}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{r+k}\frac{(2n+k-2)!(4n-k-1)!}{(k-1)!(2n-k)!}. \tag{2.7}$$

によって定義される数とする。この数 A_{2n+1}^{VS} は、次元 $2n+1$ の vertically symmetric alternating sign matrix の個数として知られている。(see [22, 26, 28]) 例えば A_{2n+1}^{VS} の最初のいくつかは 1, 3, 26, 646, 45885 となる。多項式 $A_{2n+1}^{\mathrm{VS}}(t)$ を

$$A_{2n+1}^{\mathrm{VS}}(t)=\sum_{r=1}^{2n}A_{2n+1}^{\mathrm{VS},\,r}t^{r-1}. \tag{2.8}$$

によって定義する。例えば (2.8) の最初のいくつかは $A_3^{\mathrm{VS}}(t)=1$, $A_5^{\mathrm{VS}}(t)=1+t+t^2$, $A_7^{\mathrm{VS}}(t)=3+6t+8t^2+6t^3+3t^4$, $A_9^{\mathrm{VS}}(t)=26+78t+138t^2+162t^3+138t^4+78t^5+26t^6$ となる。

この論文の中では $b=(b_{ij})_{1\le i\le j\le n+m-1}\in\mathcal{B}_{n,m}$ のとき任意の i に対して $b_{i,n+m}=n-i$、また、任意の j に対して $b_{0,j}=n$ と定義しておく。$b=(b_{ij})_{1\le i\le j\le n+m-1}\in\mathcal{B}_{n,m}$ かつ $r=1,\dots,n+m$ のとき $U_r(b)$ を

$$U_r(b)=\sum_{t=1}^{n+m-r}(b_{t,t+r-1}-b_{t,t+r})+\sum_{t=n+m-r+1}^{n+m-1}\chi\{b_{t,n+m-1}>n-t\}. \tag{2.9}$$

によって定義する。この $U_r(b)$ は $m=0$ のとき [25, pp.282] で定義されたものと一致する。この関数 U_r は 0 と $n+m-1$ の間の値を取ることを見るのは易しい。また $\overline{U}_r(b)=n+m-1-U_r(b)$ とおく。$\mathcal{P}_{n,m}$ の元と $\mathcal{B}_{n,m}$ の元を前節で定義した全単射 $\varphi_{n,m}$ によって同一視することによって $c\in\mathcal{P}_{n,m}$ に対して $U_r(c)=U_r(\varphi_{n,m}(c))$ と $\overline{U}_r(c)=\overline{U}_r(\varphi_{n,m}(c))$ を定義することができる。このとき次の定理が成り立つ。

Theorem 2.1. m と $n\ge 1$ を非負整数とし、$c\in\mathcal{P}_{n,m}$ とする。このとき $\overline{U}_r(c)$ は c の中の r の個数と r より小さい saturated part の個数である。すなわち

$$\overline{U}_r(c)=\sharp\{(i,j):c_{ij}=r\}+\sharp\{1\le k<r:c_{1,n+m-k}=k\}. \tag{2.10}$$

特に $\overline{U}_1(c)$ は c の中の 1 の個数であり。$\overline{U}_{n+m}(c)$ は c の中の saturated part の個数である。

ここでは Mills, Robbins, Rumsey が定義しなかった 2 つの新しい関数を定義しよう。$c\in\mathcal{P}_{n,m}$ に対して $V^{\mathrm{R}}(c)$ を c の奇数の長さを持つ行の個数、$V^{\mathrm{C}}(c)$ を c の奇数の長さを持つ列の個数とする。例えば $\mathcal{P}_3$ は、次の 7 個の元からなる。

$$\emptyset,\quad \begin{matrix}1\end{matrix},\quad \begin{matrix}1&1\end{matrix},\quad \begin{matrix}2\end{matrix},\quad \begin{matrix}2&1\end{matrix},\quad \begin{matrix}2\\1\end{matrix},\quad \begin{matrix}2&1\\1&\end{matrix}.$$

ここで、関数 $\overline{U}_k(c)$ $(k=1,2,3)$, $V^{\mathrm{R}}(c)$, $V^{\mathrm{C}}(c)$ の分布は Table 1 のようになる。

$\overline{U}_1(c)$	0	1	2	0	1	1	2
$\overline{U}_2(c)$	0	0	1	2	1	1	2
$\overline{U}_3(c)$	0	0	1	2	1	1	2
$V^{\mathrm{R}}(c)$	0	1	0	1	0	2	1
$V^{\mathrm{C}}(c)$	0	1	2	1	2	0	1

Table 1: The distribution statistics table in $\mathcal{P}_3$

ここでは Mills, Robbins, Rumsey による予想を引用しよう。

Conjecture 2.2. ([25, pp.282, Conjecture 2]) n を正整数とし、$1 \le k \le n$ かつ $1 \le r \le n$ とする。このとき $\mathcal{B}_n$ の元 b で $U_r(b) = k-1$ を満たすものは A_n^k 個である。すなわち $\sum_{b\in\mathcal{B}_n} t^{U_r(b)} = A_n(t)$ が成り立つ。

Conjecture 2.3. ([25, pp.284, Conjecture 3], [33]) $n \ge 2$ と $1 \le k, l \le n$ を整数とする。このとき $\mathcal{B}_n$ の元 b で $U_1(b) = k-1$ かつ $U_2(b) = n-l$ を満たすものの個数は $A_n^{k,l}$ である。

Size が n の *monotone triangle* とは正整数を三角形に並べた

$$\begin{array}{ccccc} & & & & m_{n,n} \\ & & & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ m_{1,1} & \cdots & & m_{1,n-1} & m_{1,n} \end{array}$$

で次の条件を満たすもののことである。

(M1) 両辺が定義されているとき常に $m_{ij} < m_{i,j+1}$;

(M2) 両辺が定義されているとき常に $m_{ij} \ge m_{i+1,j}$;

(M3) 両辺が定義されているとき常に $m_{ij} \le m_{i+1,j+1}$;

(M4) 最下段の行 $(m_{1,1}, m_{1,2}, \dots, m_{1,n})$ は $(1, 2, \dots, n)$ である。

$\mathcal{M}_n$ を size n の monotone triangles 全体の集合とする。例えば $\mathcal{M}_3$ は、次の 7 個の元からなる。

$$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & 2 \\ & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & 1 \\ & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & 2 \\ & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & 3 \\ & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & 2 \\ & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & 3 \\ & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$ とする。Monotone triangle $m = (m_{ij})$ で最初の $n-k$ 列の成分 m_{ij} がその取りえる最小の値 $j-i+1$ に等しいもの全体のなす集合を $\mathcal{M}_n^k$ と書く。また $b = (b_{ij}) \in \mathcal{B}_n$ で最初の $n-1-k$ 列の成分 b_{ij} がその取りえる最大の値 n に等しいもの全体のなす集合を $\mathcal{B}_n^k$ と書く。

Conjecture 2.4. ([25, pp.287, Conjecture 7]) $n \ge 2$ と $k = 0, 1, \dots, n-1$ を整数とする。このとき $\mathcal{B}_n^k$ の元の個数は $\mathcal{M}_n^k$ の元の個数に等しい。

$k=0,\dots,n+m-1$ とする。$b=(b_{ij})_{1\le i\le j\le n+m-1}\in\mathcal{B}_{n,m}$ で、最初の $n+m-1-k$ 列の成分 b_{ij} が、その取りえる最大の値 n であるようなもの全体の集合を $\mathcal{B}^k_{n,m}$ で表わす。また $c=(c_{ij})\in\mathcal{P}_{n,m}$ で、k 行以下であるもの全体を $\mathcal{P}^k_{n,m}$ で表わす。例えば $n=3$ かつ $m=0$ のとき $\mathcal{B}_3$ は

$$\begin{array}{cc}\boxed{3}&\boxed{3}\\&\boxed{3}\end{array}\quad\begin{array}{cc}\boxed{3}&\boxed{3}\\&\boxed{2}\end{array}\quad\begin{array}{cc}\boxed{3}&\boxed{3}\\&\boxed{1}\end{array}\quad\begin{array}{cc}\boxed{3}&\boxed{2}\\&\boxed{2}\end{array}\quad\begin{array}{cc}\boxed{3}&\boxed{2}\\&\boxed{1}\end{array}\quad\begin{array}{cc}\boxed{2}&\boxed{2}\\&\boxed{2}\end{array}\quad\begin{array}{cc}\boxed{2}&\boxed{2}\\&\boxed{1}\end{array}$$

であり、$\mathcal{P}_3$ は

$$\emptyset\qquad 1\qquad 1\;1\qquad 2\qquad 2\;1\qquad \begin{array}{c}2\\1\end{array}\qquad \begin{array}{cc}2&1\\1&\end{array}$$

である。よって $\mathcal{P}_3$ の元のうち 0 行であるのは $\emptyset$ のみであり、1 行以下であるものは 5 個あり、2 行以下であるものは 7 個ある。このとき、次の定理が成り立つ。

Theorem 2.5. m と $n\ge 1$ を非負整数とし、$0\le k\le n+m-1$ とする。Corollary 1.6 の中で定義された全単射 $\varphi_{n,m}$ によって $\mathcal{B}_{n,m}$ の部分集合 $\mathcal{B}^k_{n,m}$ は $\mathcal{P}_{n,m}$ の部分集合 $\mathcal{P}^k_{n,m}$ に写る。特に

$$\sum_{b\in\mathcal{B}^k_{n,m}} t^{U_r(b)}=\sum_{c\in\mathcal{P}^k_{n,m}} t^{\overline{U}_r(c)}.$$

である。

また Mills, Robbins, Rumsey の論文 [25] に載っていない次の予想も作れる。

Conjecture 2.6. $n\ge 1$ を正整数とし $1\le r\le n$ とする。このとき

$$\sum_{c\in\mathcal{P}^{\mathrm{R}}_n} t^{\overline{U}_r(c)}=\begin{cases}A^{\mathrm{VS}}_{2m+1}\cdot A^{\mathrm{VS}}_{2m+1}(t) & \text{if } n=2m,\\ A^{\mathrm{VS}}_{2m+1}\cdot A^{\mathrm{VS}}_{2m+3}(t) & \text{if } n=2m+1.\end{cases}$$

が成り立つ。特に $t=1$ のとき $\mathcal{P}^{\mathrm{R}}_n$ の元の個数は

$$\begin{cases}\left(A^{\mathrm{VS}}_{2m+1}\right)^2 & \text{if } n=2m,\\ A^{\mathrm{VS}}_{2m+1}\cdot A^{\mathrm{VS}}_{2m+3} & \text{if } n=2m+1.\end{cases}$$

である。

3 The generating functions

まずは、この節で使う行列の定義から始めよう。n を正の定数とする。n 次の skew-symmetric matrix $S_n=(s_{ij})_{1\le i,j\le n}$ を (i,j)-成分 s_{ij} $(1\le i<j\le n)$ が常に 1 である行列とする。また n 次の skew-symmetric matrix $\bar{S}_n=(\bar{s}_{ij})_{1\le i,j\le n}$ を (i,j)-成分 $\bar{s}_{ij}$ が $(-1)^{j-i-1}$ $(1\le i<j\le n)$ である行列とする。O_n は $n\times n$ の零行列とする。$J_n=(\delta_{i,n+1-j})_{1\le i,j\le n}$ を反対角行列とする。ここで $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタ関数である。整数 a を整数 b で割った余りを $\mathrm{rem}(a,b)$ で表わす。t を変数とする。$n\times n$ skew-symmetric matrices $R_n(t)=(r_{ij}(t))_{1\le i,j\le n}$, $C_n(t)=(c_{ij}(t))_{1\le i,j\le n}$, $\bar{R}_n(t)=(\bar{r}_{ij}(t))_{1\le i,j\le n}$, $\bar{C}_n(t)=(\bar{c}_{ij}(t))_{1\le i,j\le n}$ を、それぞれ $r_{ij}(t)=t^{\mathrm{rem}(i-1,2)+\mathrm{rem}(j,2)}$, $c_{ij}(t)=t^{j-i-1}$, $\bar{r}_{ij}(t)=(-1)^{j-i-1}t^{j-i-1}$, $\bar{c}_{ij}(t)=(-1)^{j-i-1}t^{\mathrm{rem}(n+1-i,2)+\mathrm{rem}(n-j,2)}$ に

よって定義する。ここで $1 \leq i < j \leq n$ とする。さらに $R_n(0)$, $C_n(0)$, $\bar{R}_n(0)$, $\bar{C}_n(0)$, の代わりに、それぞれ R_n, C_n, $\bar{R}_n$, $\bar{C}_n$ と書く。例えば

$$R_4(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t & 1 \\ -1 & 0 & t^2 & t \\ -t & -t^2 & 0 & 1 \\ -1 & -t & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad C_4(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t & t^2 \\ -1 & 0 & 1 & t \\ -t & -1 & 0 & 1 \\ -t^2 & -t & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

である。m, n, k を $1 \leq m \leq n$ かつ $0 \leq k \leq n-m$ を満たす整数とする。また ε を変数とする。$L_n^{(m,k)}(\varepsilon) = (l_{ij}^{(m,k)}(\varepsilon))_{1 \leq i,j \leq n}$ を $n \times n$ skew-symmetric matrix で、(i,j)-成分が

$$l_{ij}^{(m,k)}(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{if } 1 \leq i < j \leq m+k, \\ \varepsilon & \text{if } 1 \leq i < j \leq n \text{ and } m+k < j. \end{cases}$$

が与えられるものとする。$n \times n$ skew-symmetric matrix $\bar{L}_n^{(m,k)}(\varepsilon) = (\bar{l}_{ij}^{(m,k)}(\varepsilon))_{1 \leq i,j \leq n}$ の (i,j)-成分を次のように定義する。もし k が偶数ならば

$$\bar{l}_{ij}^{(m,k)}(\varepsilon) = \begin{cases} (-1)^{j-i-1}\varepsilon & \text{if } 1 \leq i < j \leq n \text{ and } i \leq m+k, \\ (-1)^{j-i-1} & \text{if } m+k < i < j \leq n, \end{cases}$$

であり、奇数ならば

$$\bar{l}_{ij}^{(m,k)}(\varepsilon) = \begin{cases} (-1)^{j-i-1}\varepsilon & \text{if } 1 \leq i < j \leq m+k, \\ (-1)^{j-i-1} & \text{if } 1 \leq i < j \leq n \text{ and } m+k < j. \end{cases}$$

である。例えば

$$\bar{L}_6^{(2,1)}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & -\varepsilon & 1 & -1 & 1 \\ -\varepsilon & 0 & \varepsilon & -1 & 1 & -1 \\ \varepsilon & -\varepsilon & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{L}_6^{(2,2)}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & 0 & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & 0 & \varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & 0 & 1 \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

である。

Krattenthaler の結果 (see [18, Theorem 2]) と Corollary 1.6 を使うと

$$\sharp\mathcal{P}_{n,m} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+3m+1)! \prod_{i=0}^{m}(k+2i)!}{(2k+m)!(2k+3m+1)! \prod_{i=1}^{m}(k+2i-1)!} \tag{3.1}$$

ということがわかる。次に我々の結果を述べる。n と N を正整数とし m を非負整数とする。$n \times (n+N)$ 行列 $B_{n,m}^{N}(t,u) = (b_{ij}^{(m)}(t,u))_{0 \leq i \leq n-1,\ 0 \leq j \leq n+N-1}$ を (i,j)-成分が、次で与えられる行列とする。

$$b_{ij}^{(m)}(t,u) = \begin{cases} \delta_{0,j} & \text{if } i+m=0, \\ \binom{i+m-1}{j-i} + \binom{i+m-1}{j-i-1}tu & \text{if } i+m=1, \\ \binom{i+m-2}{j-i} + \binom{i+m-2}{j-i-1}(t+u) + \binom{i+m-2}{j-i-2}tu & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.2}$$

例えば

$$B^2_{3,0}(t,u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & tu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t+u & tu \end{pmatrix}$$

である。また $n \times (n+N)$ 行列 $B^N_{n,m}(t) = B^N_{n,m}(t,1)$ と $B^N_{n,m} = B^N_{n,m}(1)$ を定義する。よって $B^N_{n,m}(t)$ の (i,j)-成分は

$$b^{(m)}_{ij}(t) = \begin{cases} \delta_{0,j} & \text{if } i+m=0, \\ \binom{i+m-1}{j-i} + \binom{i+m-1}{j-i-1}t & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.3}$$

によって与えられ、$B^N_{n,m}$ の (i,j)-成分は $\binom{i+m}{j-i}$ によって与えられる。ここで、行の添え字は i は $0 \le i \le n-1$ を動き、列の添え字 j は $0 \le j \le n+N-1$ を動くことを注意されたい。次の定理は Conjecture 2.3 の Pfaffian 表示での答となる。

Theorem 3.1. m と $n \ge 1$ を非負整数とし N を $N \ge n+m-1$ を満たす偶数とする。

(i) r を $2 \le r \le n+m$ を満たす正整数とする。このとき $c \in \mathcal{P}_{n,m}$ の母関数は

$$\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}} t^{\overline{U}_1(c)} u^{\overline{U}_r(c)} = \text{Pf} \begin{pmatrix} O_n & J_n B^N_{n,m}(t,u) \\ -{}^t B^N_{n,m}(t,u) J_n & \bar{S}_{n+N} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

である。

(ii) r を $2 \le r \le n+m$ を満たす正整数とする。このとき $c \in \mathcal{P}^{\mathrm{C}}_{n,m}$ の母関数は

$$\sum_{c \in \mathcal{P}^{\mathrm{C}}_{n,m}} t^{\overline{U}_1(c)} u^{\overline{U}_r(c)} = \text{Pf} \begin{pmatrix} O_n & J_n B^N_{n,m}(t,u) \\ -{}^t B^N_{n,m}(t,u) J_n & \bar{R}_{n+N} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

である。

(iii) r を $1 \le r \le n+m$ を満たす正整数とする。このとき $c \in \mathcal{P}_{n,m}$ の母関数は

$$\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}} t^{\overline{U}_r(c)} u^{V^{\mathrm{C}}(c)} = \text{Pf} \begin{pmatrix} O_n & J_n B^N_{n,m}(t) \\ -{}^t B^N_{n,m}(t) J_n & \bar{C}_{n+N}(u) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

である。

特に、このことから次の系が示される。

Corollary 3.2. m と $n \ge 1$ を非負整数とする。r と s を $2 \le r, s \le n$ を満たす整数とし、k を $1 \le k \le n$ を満たす整数とする。このとき

$$\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}} t^{\overline{U}_1(c)} u^{\overline{U}_r(c)} = \sum_{c \in \mathcal{P}^{\mathrm{C}}_{n,m+1}} t^{\overline{U}_1(c)} u^{\overline{U}_s(c)} = \sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}} t^{\overline{U}_k(c)} u^{V^{\mathrm{C}}(c)}$$

Corollary 3.1(i) で $u=1$ とおくと次の (i) を得る。これは Conjecture 2.2 の答の Pfaffian 表示であり、また (iii) は Conjecture 2.6 の答の Pfaffian 表示である。

Theorem 3.3. m と $n \geq 1$ を非負整数とし N を $N \geq n+m-1$ を満たす偶数とする。

(i) r を $1 \leq r \leq n+m$ を満たす整数とする。このとき $c \in \mathcal{P}_{n,m}$ の母関数は

$$\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}} t^{\overline{U}_r(c)} = \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} O_n & J_n B_{n,m}^N(t) \\ -{}^t B_{n,m}^N(t) J_n & \bar{S}_{n+N} \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

(ii) r を $1 \leq r \leq n+m$ を満たす整数とする。このとき $c \in \mathcal{P}_{n,m}^{\mathrm{C}}$ の母関数は

$$\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}^{\mathrm{C}}} t^{\overline{U}_r(c)} = \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} O_n & J_n B_{n,m}^N(t) \\ -{}^t B_{n,m}^N(t) J_n & \bar{R}_{n+N} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

(iii) r を $1 \leq r \leq n+m$ を満たす整数とする。このとき $c \in \mathcal{P}_{n,m}^{\mathrm{R}}$ の母関数は

$$\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}^{\mathrm{R}}} t^{\overline{U}_r(c)} = \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} O_n & J_n B_{n,m}^N(t) \\ -{}^t B_{n,m}^N(t) J_n & \bar{C}_{n+N} \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

(iv) $c \in \mathcal{P}_{n,m}$ の母関数は

$$\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}} t^{V^{\mathrm{C}}(c)} = \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} O_n & J_n B_{n,m}^N \\ -{}^t B_{n,m}^N J_n & \bar{R}_{n+N}(t) \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

(v) $c \in \mathcal{P}_{n,m}$ の母関数は

$$\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}} t^{V^{\mathrm{R}}(c)} = \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} O_n & J_n B_{n,m}^N \\ -{}^t B_{n,m}^N J_n & \bar{C}_{n+N}(t) \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

(3.7), (3.8), (3.9) の右辺は r に依存しないことに注意しよう。

Corollary 3.4. $m \geq 0$ と $n \geq 1$ を非負整数とし r と s を $1 \leq r, s \leq n$ を満たす整数とする。このとき

$$\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}} t^{\overline{U}_r(c)} = \sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m+1}^{\mathrm{C}}} t^{\overline{U}_s(c)} = \sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}} t^{V^{\mathrm{C}}(c)}.$$

特に $\sharp\mathcal{P}_{n,m} = \sharp\mathcal{P}_{n,m+1}^{\mathrm{C}}$ である。

Theorem 3.5. m と $n \geq 1$ を非負整数とし、N を $N \geq n+m-1$ を満たす偶数とする。r が $1 \leq r \leq n+m$ を満たす正整数のとき $c \in \mathcal{P}_{n,m}$ の母関数は

$$\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}^k} t^{\overline{U}_r(c)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} O_n & J_n B_{n,m}^N(t) \\ -{}^t B_{n,m}^N(t) J_n & \bar{L}_{n+N}^{(n,k)}(\varepsilon) \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

で与えられる。特に $t = 1$ のとき $\mathcal{P}_{n,m}^k$ の元の個数は

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} O_n & J_n B_{n,m}^N \\ -{}^t B_{n,m}^N J_n & \bar{L}_{n+N}^{(n,k)}(\varepsilon) \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

に等しい。

この系からわかることは $\sum_{c\in\mathcal{P}^k_{n,m}} t^{\overline{U}_r(c)}$ が r に依存しないことである。例えば $n=3$, $m=0$, $k=1$ のとき (3.12) の右辺の Pfaffian は

$$
\mathrm{Pf}\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1+t & t & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 0 & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -1 & 1 & -1 \\
0 & -1 & 0 & -\varepsilon & 0 & \varepsilon & -\varepsilon & 1 & -1 & 1 \\
-1 & -t & 0 & \varepsilon & -\varepsilon & 0 & \varepsilon & -1 & 1 & -1 \\
-1-t & 0 & 0 & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & 0 & 1 & -1 & 1 \\
-t & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0
\end{pmatrix}
$$

となり、これは $(t^2+2t+2)+(t^2+t)\varepsilon$ に等しい。$\varepsilon\to 0$ のとき、これは t^2+2t+2 に近づく。

4 Constant term identities

[34] の論文の中で D. Zeilberger は、次の等式を示した。D を、次で与えられる $n\times(2n+m-1)$ 行列 X の $n\times n$ 小行列式全体の和とする。

$$
X_{ij}=\binom{m+i}{j-i},\qquad 0\le i\le n-1,\quad 0\le j\le 2n+m-2,
$$

また C を

$$
\prod_{1\le i\le j\le n}\left(1-\frac{z_i}{z_j}\right)\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{z_i}\right)^{m+n-i}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-z_i}\prod_{1\le i\le j\le n}\frac{1}{1-z_iz_j},
$$

の定数項とする。このとき $D=C$ が成り立つ。

この節の目的は、この等式の一般化であり、前の節の Pfaffian 表示を constant term identity に言い換えることである。次のような等式は Littlewood の等式と言われることが多い。

$$
\sum_{\lambda} s_\lambda^{(n)}(\boldsymbol{x})=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-z_i}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{1}{1-z_iz_j},\tag{4.1}
$$

$$
\sum_{\lambda\text{ even}} s_\lambda^{(n)}(\boldsymbol{x})=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-z_i^2}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{1}{1-z_iz_j},\tag{4.2}
$$

$$
\sum_{\lambda'\text{ even}} s_\lambda^{(n)}(\boldsymbol{x})=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{1}{1-z_iz_j},\tag{4.3}
$$

ここで $s_\lambda^{(n)}(\boldsymbol{x})$ は n 変数 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$ に関する partition λ の Schur function で

ある。([23, I, 5, Ex.4, 5]) また、この一般化として

$$\sum_{\lambda} t^{r(\lambda)} s_{\lambda}^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1+tz_i}{1-z_i^2} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{1}{1-z_iz_j}, \tag{4.4}$$

$$\sum_{\lambda} t^{c(\lambda)} s_{\lambda}^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-tz_i} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{1}{1-z_iz_j}, \tag{4.5}$$

(see [23, I, 5, Ex.7, 8]) なども有名である。I.G. Macdonald の式

$$\sum_{\substack{\lambda \\ \lambda_1\le k}} s_{\lambda}^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\det(z_i^{j-1} - z_i^{k+2n-j})_{1\le i,j\le n}}{\prod_{i=1}^{n}(1-z_i)\prod_{1\le i<j\le n}(z_j-z_i)(1-z_iz_j)}, \tag{4.6}$$

([23, I, 5, Ex.16]) も知られている。

ここで $h_i^{(m)}(z,t,u) = \sum_{j\ge 0} b_{ij}^{(m)}(t,u) z^{j-i}$ とおく。ここで $b_{ij}^{(m)}(t)$ は (3.2) で定義されたものである。これを計算すると

$$h_i^{(m)}(z,t,u) = \begin{cases} (1+z)^{m+i} & \text{if } m+i=0, \\ (1+z)^{m+i-1}(1+tuz) & \text{if } m+i=1, \\ (1+z)^{m+i-2}(1+tz)(1+uz) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.7}$$

となる。また $h_i^{(m)}(z,t,1)$ の代わりに $h_i^{(m)}(z,t)$ と書き、$h_i^{(m)}(z) = h_i^{(m)}(z,1) = (1+z)^{m+i}$ という記号も使う。次の定理は doubly refined enumeration 予想に関する定数項表示を与える。

Theorem 4.1. m と $n\ge 1$ を非負整数とする。

(i) r を $2\le r\le n+m$ を満たす整数とする。このとき $\sum_{c\in\mathcal{P}_{n,m}} t^{\overline{U}_1(c)} u^{\overline{U}_r(c)}$ は

$$\mathrm{CT}_{\boldsymbol{z}} \prod_{1\le i<j\le n} \left(1-\frac{z_j}{z_i}\right) \prod_{k=1}^{n} h_{n-k}^{(m)}(z_k^{-1},t,u) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-z_i} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{1}{1-z_iz_j} \tag{4.8}$$

に等しい。

(ii) r を $2\le r\le n+m$ を満たす整数とする。このとき $\sum_{c\in\mathcal{P}_{n,m}^{\mathrm{C}}} t^{\overline{U}_1(c)} u^{\overline{U}_r(c)}$ は

$$\mathrm{CT}_{\boldsymbol{z}} \prod_{1\le i<j\le n} \left(1-\frac{z_j}{z_i}\right) \prod_{k=1}^{n} h_{n-k}^{(m)}(z_k^{-1},t,u) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-z_i^2} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{1}{1-z_iz_j} \tag{4.9}$$

に等しい。

(iii) r を $1\le r\le n+m$ を満たす整数とする。このとき $\sum_{c\in\mathcal{P}_{n,m}} t^{\overline{U}_1(c)} u^{V^{\mathrm{C}}(c)}$ は

$$\mathrm{CT}_{\boldsymbol{z}} \prod_{1\le i<j\le n} \left(1-\frac{z_j}{z_i}\right) \prod_{k=1}^{n} h_{n-k}^{(m)}(z_k^{-1},t) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-uz_i} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{1}{1-z_iz_j} \tag{4.10}$$

に等しい。

次の定理は refined enumeration に関する constant term identity である。

Theorem 4.2. m と $n \geq 1$ を非負整数とする。

(i) r を $1 \leq r \leq n+m$ を満たす整数とする。このとき $\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}} t^{\overline{U}_r(c)}$ は

$$\mathrm{CT}_{\boldsymbol{z}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{z_j}{z_i}\right) \prod_{k=1}^{n} h_{n-k}^{(m)}(z_k^{-1}, t) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - z_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{1 - z_i z_j} \tag{4.11}$$

に等しい。

(ii) r を $1 \leq r \leq n+m$ を満たす整数とする。このとき $\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}^{\mathrm{C}}} t^{\overline{U}_r(c)}$ は

$$\mathrm{CT}_{\boldsymbol{z}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{z_j}{z_i}\right) \prod_{k=1}^{n} h_{n-k}^{(m)}(z_k^{-1}, t) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - z_i^2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{1 - z_i z_j} \tag{4.12}$$

に等しい。

(iii) r を $1 \leq r \leq n+m$ を満たす整数とする。このとき $\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}^{\mathrm{R}}} t^{\overline{U}_r(c)}$ は

$$\mathrm{CT}_{\boldsymbol{z}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{z_j}{z_i}\right) \prod_{k=1}^{n} h_{n-k}^{(m)}(z_k^{-1}, t) \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{1 - z_i z_j} \tag{4.13}$$

に等しい。特に $t = 1$ のとき、$\sharp\mathcal{P}_{n,m}^{\mathrm{R}}$ は

$$\mathrm{CT}_{\boldsymbol{z}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{z_j}{z_i}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{z_k}\right)^{n+m-k} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - z_i^2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{1 - z_i z_j}. \tag{4.14}$$

に等しい。

(iv) $\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}} t^{V^{\mathrm{C}}(c)}$ は

$$\mathrm{CT}_{\boldsymbol{z}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{z_j}{z_i}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{z_k}\right)^{n+m-k} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - t z_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{1 - z_i z_j} \tag{4.15}$$

に等しい。

(v) $\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}} t^{V^{\mathrm{R}}(c)}$ は

$$\mathrm{CT}_{\boldsymbol{z}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{z_j}{z_i}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{z_k}\right)^{n+m-k} \prod_{i=1}^{n} \frac{1 + t z_i}{1 - z_i^2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{1 - z_i z_j} \tag{4.16}$$

に等しい。

次の定理は Conjecture 2.4 に対する constant term identity である。

Corollary 4.3. m と $n \geq 1$ を非負整数とする。r が $1 \leq r \leq n+m$ を満たす整数とする。このとき $\sum_{c \in \mathcal{P}_{n,m}^k} t^{\overline{U}_r(c)}$ は

$$\mathrm{CT}_{\boldsymbol{z}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{z_j}{z_i}\right) \prod_{i=1}^{n} h_{n-i}^{(m)}(z_i^{-1}, t) \frac{\det(z_i^{j-1} - z_i^{k+2n-j})_{1 \leq i,j \leq n}}{\prod_{i=1}^{n}(1-z_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n}(z_j - z_i)(1 - z_i z_j)}. \tag{4.17}$$

に等しい。特に $t=1$ のとき、$\mathcal{P}_{n,m}^k$ の元の個数は

$$\mathrm{CT}_{\boldsymbol{z}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 - \frac{z_j}{z_i}\right) \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{z_i}\right)^{n+m-k} \frac{\det(z_i^{j-1} - z_i^{k+2n-j})_{1 \leq i,j \leq n}}{\prod_{i=1}^{n}(1-z_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n}(z_j - z_i)(1 - z_i z_j)}. \tag{4.18}$$

に等しい。

References

[1] G.E. Andrews, "Pfaff's method (I): the Mills-Robbins-Rumsey determinant", *Discrete Math.* **193** (1998), 43–60.

[2] G.E. Andrews, "Plane partitions V: the TSSCPP conjecture", *J. Combin. Theory Ser. A* **66** (1994), 28–39.

[3] G.E. Andrews and W.H. Burge, "Determinant identities", *Pacific J. Math.* **158** (1993), 1–14.

[4] D.M. Bressound, *Proofs and Confirmations*, Cambridge U.P.

[5] P. Di Francesco, "A refined Razumnov-Stroganov conjecture", `arXiv:cond-mat/0407477`.

[6] P. Di Francesco and P. Zinn-Junstin, "Around the Razumnov-Stroganov conjecture: proof of a multi-parameter sum rule", `arXiv:math-ph/0410061`.

[7] T. Eisenkölbl, "(-1)-enumeration of plane partitions with complementation symmetry" Adv. in Appl. Math. **30** (2003), 53–95.

[8] I. Gessel and G. Viennot, *Determinants, Paths, and Plane Partitions*, preprint (1989).

[9] T. Hashimoto, "A central element in the universal enveloping algebra of type D_n via minor summation formula of Pfaffians", `arXiv:math.RT/0602055`.

[10] M. Ishikawa, "Minor summation formula and a proof of Stanley's open problem", `arXiv:math.CO/0408204`.

[11] M. Ishikawa, "On refined enumerations of totally symmetric self-complementary plane partitions I", `arXiv:math.CO/0602068`.

[12] M. Ishikawa, "On refined enumerations of totally symmetric self-complementary plane partitions II", in preparation.

[13] M. Ishikawa, H. Tagawa, S. Okada and J. Zeng, "Generalizations of Cauchy's determinant and Schur's Pfaffian", `arXiv:math.CO/0411280`, to appear in *Adv. in Appl. Math.*

[14] M. Ishikawa, S. Okada and M. Wakayama, "Minor summation of Pfaffians and generalized Littlewood type formulas", *J. Alg.* **183** (1996), 193-216.

[15] M. Ishikawa and M. Wakayama, "Minor summation formula of Pfaffians", *Linear and Multilinear algebra* **39** (1995), 285–305.

[16] M. Ishikawa and M. Wakayama, "Applications of the minor summation formula III: Plücker relations, lattice pathes and Pfaffians", `arXiv:math.CO/0312358`, *J. Combin. Theory Ser. A* **113** (2006) 113-155.

[17] D.E. Knuth, "Overlapping Pfaffians", *Electron. J. Combin.* **3**, 151–163.

[18] C. Krattenthaler, "Determinant identities and a generalization of the number of totally symmetric self-complementary plane partitions", *Electron. J. Combin.* **4(1)** (1997), #R27.

[19] C. Krattenthaler, "Advanced determinant calculus", *Sem. Lothar. Combin.* **42** ("The Andrews Festschrift") (1999), Article B42q.

[20] G. Kuperberg, "Another proof of the alternating-aign matrix conjecture", *Int. Math. Res. Not.* **3** (1996), 139–150. `arXiv:math.CO/9810091`.

[21] G. Kuperberg, "An exploration of the permanent-determinant method", *Electron. J. Combin.* **5** (1998), #R64, `arXiv:math.CO/9810091`.

[22] G. Kuperberg, "Symmetry classes of alternating-sign matrices under one roof", *Ann. of Math.* (2) **156** (2002), 835-866, `arXiv:math.CO/0008184`.

[23] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials (2nd ed.)*, Oxford Univ. Press, (1995).

[24] W.H. Mills, D.P. Robbins and H. Rumsey, "Alternating sign matrices and descending plane partitions", *J. Combin. Theory Ser. A* **34**, (1983), 340–359.

[25] W.H. Mills, D.P. Robbins and H. Rumsey, "Self-complementary totally symmetric plane partitions", *J. Combin. Theory Ser. A* **42**, (1986), 277–292.

[26] S. Okada, "Enumeration of symmetry classes of alternating sign matrices and characters of classical groups", `arXiv:math.CO/0308234`, to appear.

[27] D.P. Robbins, "Symmetry classes of alternating sign matrices", `arXiv:math.CO/0008045`.

[28] A.V. Razumov and Yu. G. Stroganov, "On refined enumerations of some symmetry classes of ASMs", `arXiv:math-ph/0312071`.

[29] R.P. Stanley, "Symmetries of plane partitions", *J. Combin. Theory Ser. A* **43**, (1986), 103–113.

[30] R.P. Stanley, *Enumerative combinatorics, Volume II,* Cambridge University Press, (1999).

[31] J.R. Stembridge, "Nonintersecting paths, Pfaffians, and plane partitions" *Adv. math.*, **83** (1990), 96–131.

[32] J.R. Stembridge, "Strange Enumerations of CSPP's and TSPP's", preprint.

[33] Yu.G . Stroganov, "A new way to deal with Izergin-Korepin determinant at root of unity" `arXiv:math-ph/0204042`.

[34] D. Zeilberger, "A constant term identity featuring the ubiquitous (and mysterious) Andrews-Mills-Robbins-Rumsey numbers", *J. Combin. Theory Ser. A* **66** (1994), 17–27.

[35] D. Zeilberger, "Proof of the refined alternating sign matrix conjecture", *New York J. Math.* **2** (1996), 59–68.

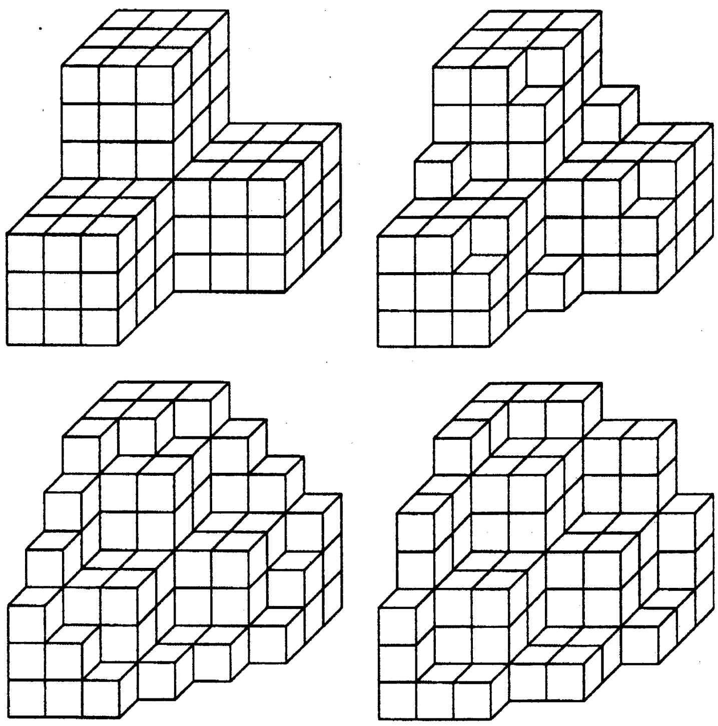

Figure 1: TSSCPP ($n = 1$, $m = 2$)